Frank Richter

Semantik II

Syntax and Semantics of Higher Order Intensional Logic

Types As in our previous higher-order language, all expressions of our higher-order intensional language, $\mathcal{L}_{\mathsf{Type}}$, will be typed.

Definition 1 Types
Type is the smallest set such that

i.) $e \in \mathsf{Type}$,

ii.) $t \in \mathsf{Type}$,

iii.) *for each* $\tau_1 \in \mathsf{Type}$, *for each* $\tau_2 \in \mathsf{Type}$, $\langle \tau_1, \tau_2 \rangle \in \mathsf{Type}$,

iv.) *for each* $\tau \in \mathsf{Type}$, $\langle s, \tau \rangle \in \mathsf{Type}$.

Syntax The basic expressions of $\mathcal{L}_{\mathsf{Type}}$ consist only of variables and constants. Again there is no distinction between terms and formulae.

Definition 2 Basic Expressions

i.) *For each* $\tau \in \mathsf{Type}$, Var_τ *is the smallest set such that for each* $n \in \mathbb{N}_0$, $v_{n,\tau} \in \mathsf{Var}_\tau$.

ii.) *For each* $\tau \in \mathsf{Type}$, Const_τ *is the smallest set such that for each* $n \in \mathbb{N}_0$, $c_{n,\tau} \in \mathsf{Const}$.

We write Var for the set of all variables, $\bigcup_{\tau \in \mathsf{Type}} \mathsf{Var}_\tau$, and Const for the set of all constants, $\bigcup_{\tau \in \mathsf{Type}} \mathsf{Const}_\tau$.
The set of *basic expressions* of our language is the union of the set of variables and the set of constants.

Definition 3 Meaningful Expressions
The meaningful expressions *of* $\mathcal{L}_{\mathsf{Type}}$ *are the smallest familiy* $(\mathsf{ME}_\tau)_{\tau \in \mathsf{Type}}$ *such that*

i.) *for each* $\tau \in \mathsf{Type}$, *for each* $n \in \mathbb{N}_0$, *for each variable* $v_{n,\tau} \in \mathsf{Var}_\tau$, $v_{n,\tau} \in \mathsf{ME}_\tau$;

ii.) *for each* $\tau \in \mathsf{Type}$, *for each* $n \in \mathbb{N}_0$, *for each constant* $c_{n,\tau} \in \mathsf{Const}_\tau$, $c_{n,\tau} \in \mathsf{ME}_\tau$;

iii.) *for each* $\tau \in \mathsf{Type}$, *for each* $\phi_\tau \in \mathsf{ME}_\tau$, *for each* $\psi_\tau \in \mathsf{ME}_\tau$,
$(\phi_\tau \equiv \psi_\tau)_t \in \mathsf{ME}_t$;

iv.) *for each* $\phi_{\langle \tau_2, \tau_1 \rangle} \in \mathsf{ME}_{\langle \tau_2, \tau_1 \rangle}$, *for each* $\psi_{\tau_2} \in \mathsf{ME}_{\tau_2}$,
$\left(\phi_{\langle \tau_2, \tau_1 \rangle} \left(\psi_{\tau_2}\right)\right)_{\tau_1} \in \mathsf{ME}_{\tau_1}$;

v.) *for each* $\phi_t \in \mathsf{ME}_t$,
$(\neg \phi_t)_t \in \mathsf{ME}_t$;

vi.) *for each* $\phi_t \in \mathsf{ME}_t$, *for each* $\psi_t \in \mathsf{ME}_t$,
$(\phi_t \wedge \psi_t)_t \in \mathsf{ME}_t$;

vii.) *for each* $\phi_t \in \mathsf{ME}_t$, *for each* $\psi_t \in \mathsf{ME}_t$,
$(\phi_t \vee \psi_t)_t \in \mathsf{ME}_t$;

viii.) *for each* $\phi_t \in \mathsf{ME}_t$, *for each* $\psi_t \in \mathsf{ME}_t$,
$(\phi_t \rightarrow \psi_t)_t \in \mathsf{ME}_t$;

ix.) *for each* $\phi_t \in \mathsf{ME}_t$, *for each* $\psi_t \in \mathsf{ME}_t$,
$(\phi_t \leftrightarrow \psi_t)_t \in \mathsf{ME}_t$;

x.) *for each* $\tau_1 \in \mathsf{Type}$, *for each* $\tau_2 \in \mathsf{Type}$, *for each* $n \in \mathbb{N}_0$, *for each* $v_{n,\tau_2} \in \mathsf{Var}$, *for each* $\phi_{\tau_1} \in \mathsf{ME}_{\tau_1}$,
$(\lambda v_{n,\tau_2} . \phi_{\tau_1})_{\langle \tau_2, \tau_1 \rangle} \in \mathsf{ME}_{\langle \tau_2, \tau_1 \rangle}$;

xi.) *for each* $\phi_t \in \mathsf{ME}_t$,
$\Box \phi_t \in \mathsf{ME}_t$;

xii.) *for each* $\phi_t \in \mathsf{ME}_t$,
$\Diamond \phi_t \in \mathsf{ME}_t$;

xiii.) *for each* $\tau \in \mathsf{Type}$, *for each* $\phi_\tau \in \mathsf{ME}_\tau$,
$\hat{\ }\phi_\tau \in \mathsf{ME}_{\langle s, \tau \rangle}$;

xiv.) *for each* $\tau \in \mathsf{Type}$, *for each* $\phi_{\langle s, \tau \rangle} \in \mathsf{ME}_{\langle s, \tau \rangle}$,
$\check{\ }\phi_{\langle s, \tau \rangle} \in \mathsf{ME}_\tau$;

xv.) *for each* $\tau \in \mathsf{Type}$, *for each* $n \in \mathbb{N}_0$, *for each* $v_{n,\tau} \in \mathsf{Var}$, *for each* $\phi_t \in \mathsf{ME}_t$,
$(\forall v_{n,\tau}\ \phi_t)_t \in \mathsf{ME}_t$;

xvi.) *for each* $\tau \in \mathsf{Type}$, *for each* $n \in \mathbb{N}_0$, *for each* $v_{n,\tau} \in \mathsf{Var}$, *for each* $\phi_t \in \mathsf{ME}_t$,
$(\exists v_{n,\tau}\ \phi_t)_t \in \mathsf{ME}_t$.

Semantics D is a set of individuals, and W is a set of possible worlds. The interpretation domain with respect to the set of individuals D and the set of possible worlds W is then defined as $\mathsf{D}_{e,\mathsf{D},\mathsf{W}} = \mathsf{D}$, $\mathsf{D}_{t,\mathsf{D},\mathsf{W}} = \{0,1\}$, for each $\tau_1 \in \mathsf{Type}$, for each $\tau_2 \in \mathsf{Type}$, $\mathsf{D}_{\langle\tau_1,\tau_2\rangle} = {\mathsf{D}_{\tau_2,\mathsf{D},\mathsf{W}}}^{\mathsf{D}_{\tau_1,\mathsf{D},\mathsf{W}}}$ (the set of all functions from $\mathsf{D}_{\tau_1,\mathsf{D},\mathsf{W}}$ to $\mathsf{D}_{\tau_2,\mathsf{D},\mathsf{W}}$), and for each $\tau \in \mathsf{Type}$, $\mathsf{D}_{\langle s,\tau\rangle} = {\mathsf{D}_{\tau,\mathsf{D},\mathsf{W}}}^{\mathsf{W}}$ (the set of functions from worlds to objects in the domain $\mathsf{D}_{\tau,\mathsf{D},\mathsf{W}}$).
Let I be a function which assigns to each non-logical constant of type τ, $c_{n,\tau}$ in $\mathcal{L}_{\mathsf{Type}}$, a function which gives, for each world, the meaning of that constant in that world. This means that $\mathsf{I}(c_{n,\tau}) \in {\mathsf{D}_{\tau,\mathsf{D},\mathsf{W}}}^{\mathsf{W}}$.
Let $\mathsf{M} = \langle \mathsf{D}, \mathsf{W}, \mathsf{I}\rangle$. We will call each M a *model*.
Let g be a function in $\bigcup_{\tau\in\mathsf{Type}} \left({\mathsf{D}_\tau}^{\mathsf{Var}_\tau}\right)$ which assigns an object (of the appropriate type) in the domain $\bigcup_{\tau\in\mathsf{Type}} \mathsf{D}_\tau$ to each variable in Var. We call each g an *assignment function*.
Assume that v is a variable of type τ and d is an element of D_τ. We will use the notation $g\overset{d}{v}$ for the assignment function g' which differs from the assignment function g in the following way:
For each $\tau \in \mathsf{Type}$, for each $v \in \mathsf{Var}_\tau$, for each $x \in \mathsf{Var}_\tau$, for each $d \in \mathsf{D}_\tau$,
$$g\overset{d}{v}(x) = \begin{cases} d & \text{if } x = v\text{, and} \\ g(x) & \text{otherwise.}\end{cases}$$

Definition 4 Extension (Reference) of Meaningful Expressions in Worlds given M and g
Let $\mathsf{M} = \langle \mathsf{D}, \mathsf{W}, \mathsf{I}\rangle$ *be a model and* g *an assignment function.*

i.) For each $\tau \in \mathsf{Type}$*, for each* $n \in \mathbb{N}_0$*, for each variable* $v_{n,\tau} \in \mathsf{Var}_\tau$*, for each* $w \in \mathsf{W}$*,*
$[\![v_{n,\tau}]\!]^{\mathsf{M},w,g} = g\,(v_{n,\tau})$.

ii.) For each $\tau \in \mathsf{Type}$*, for each* $n \in \mathbb{N}_0$*, for each constant* $c_{n,\tau} \in \mathsf{Const}_\tau$*, for each* $w \in \mathsf{W}$*,*
$[\![c_{n,\tau}]\!]^{\mathsf{M},w,g} = \mathsf{I}\,(c_{n,\tau})\,(w)$.

iii.) For each $\tau \in \mathsf{Type}$*, for each* $\phi_\tau \in \mathsf{ME}_\tau$*, for each* $\psi_\tau \in \mathsf{ME}_\tau$*, for each* $w \in \mathsf{W}$*,*
$[\![\,(\phi_\tau \equiv \psi_\tau)_t\,]\!]^{\mathsf{M},w,g} = 1$ *iff* $[\![\phi_\tau]\!]^{\mathsf{M},w,g} = [\![\psi_\tau]\!]^{\mathsf{M},w,g}$.

iv.) For each $\phi_{\langle\tau_2,\tau_1\rangle} \in \mathsf{ME}_{\langle\tau_2,\tau_1\rangle}$*, for each* $\psi_{\tau_2} \in \mathsf{ME}_{\tau_2}$*, for each* $w \in \mathsf{W}$*,*
$[\![\,\left(\phi_{\langle\tau_2,\tau_1\rangle}\,(\psi_{\tau_2})\right)_{\tau_1}\,]\!]^{\mathsf{M},w,g} = [\![\phi_{\langle\tau_2,\tau_1\rangle}]\!]^{\mathsf{M},w,g}\left([\![\psi_{\tau_2}]\!]^{\mathsf{M},w,g}\right)$.

v.) For each $\phi_t \in \mathsf{ME}_t$*, for each* $w \in \mathsf{W}$*,*
$[\![\,(\neg\phi_t)_t\,]\!]^{\mathsf{M},w,g} = 1$ *iff* $[\![\,(\phi_t)_t\,]\!]^{\mathsf{M},w,g} = 0$

vi.) For each $\phi_t \in \mathsf{ME}_t$*, for each* $\psi_t \in \mathsf{ME}_t$*, for each* $w \in \mathsf{W}$*,*
$[\![\,(\phi_t \wedge \psi_t)_t\,]\!]^{\mathsf{M},w,g} = 1$ *iff* $[\![\phi_t]\!]^{\mathsf{M},w,g} = 1$ *and* $[\![\psi_t]\!]^{\mathsf{M},w,g} = 1$.

vii.) For each $\phi_t \in \mathsf{ME}_t$*, for each* $\psi_t \in \mathsf{ME}_t$*, for each* $w \in \mathsf{W}$*,*
$[\![\,(\phi_t \vee \psi_t)_t\,]\!]^{\mathsf{M},w,g} = 1$ *iff* $[\![\phi_t]\!]^{\mathsf{M},w,g} = 1$ *or* $[\![\psi_t]\!]^{\mathsf{M},w,g} = 1$.

viii.) *For each* $\phi_t \in \mathsf{ME}_t$*, for each* $\psi_t \in \mathsf{ME}_t$*, for each* $w \in \mathsf{W}$*,*

$[\![\,(\phi_t \rightarrow \psi_t)_t\,]\!]^{\mathsf{M},w,g} = 1$ *iff* $[\![\phi_t]\!]^{\mathsf{M},w,g} = 0$ *or* $[\![\psi_t]\!]^{\mathsf{M},w,g} = 1$.

ix.) *For each* $\phi_t \in \mathsf{ME}_t$*, for each* $\psi_t \in \mathsf{ME}_t$*, for each* $w \in \mathsf{W}$*,*

$[\![\,(\phi_t \leftrightarrow \psi_t)_t\,]\!]^{\mathsf{M},w,g} = 1$ *iff* $[\![\phi_t]\!]^{\mathsf{M},w,g} = [\![\psi_t]\!]^{\mathsf{M},w,g}$.

x.) *For each* $\tau_1 \in \mathsf{Type}$*, for each* $\tau_2 \in \mathsf{Type}$*, for each* $n \in \mathbb{N}_0$*, for each* $v_{n,\tau_2} \in \mathsf{Var}$*, for each* $\phi_{\tau_1} \in \mathsf{ME}_{\tau_1}$*, for each* $w \in \mathsf{W}$*,*

$[\![\,(\lambda v_{n,\tau_2}.\phi_{\tau_1})_{\langle \tau_2,\tau_1 \rangle}\,]\!]^{\mathsf{M},w,g}$ *is that function* h *from* D_{τ_2} *to* D_{τ_1} *such that for each* $o \in \mathsf{D}_{\tau_2}$, $h(o) = [\![\phi_{\tau_1}]\!]^{\mathsf{M},w,g\overset{o}{v}_{n,\tau_2}}$.

xi.) *For each* $\phi_t \in \mathsf{ME}_t$*, for each* $w \in \mathsf{W}$*,*

$[\![\,\Box\,\phi_t]\!]^{\mathsf{M},w,g} = 1$ *iff for all* $w' \in \mathsf{W}$, $[\![\phi_t]\!]^{\mathsf{M},w',g} = 1$.

xii.) *For each* $\phi_t \in \mathsf{ME}_t$*, for each* $w \in \mathsf{W}$*,*

$[\![\,\diamond\,\phi_t]\!]^{\mathsf{M},w,g} = 1$ *iff for at least one* $w' \in \mathsf{W}$, $[\![\phi_t]\!]^{\mathsf{M},w',g} = 1$.

xiii.) *For each* $\tau \in \mathsf{Type}$*, for each* $\phi_\tau \in \mathsf{ME}_\tau$*, for each* $w \in \mathsf{W}$*,*

$[\![\,\hat{}\,\phi_\tau]\!]^{\mathsf{M},w,g}$ *is that function* $h \in {\mathsf{D}_{\tau,\mathsf{D},\mathsf{W}}}^{\mathsf{W}}$ *such that for all* $w' \in \mathsf{W}$, $h(w') = [\![\phi_\tau]\!]^{\mathsf{M},w',g}$.

xiv.) *For each* $\tau \in \mathsf{Type}$*, for each* $\phi_{\langle s,\tau \rangle} \in \mathsf{ME}_\tau$*, for each* $w \in \mathsf{W}$*,*

$[\![\,\check{}\,\phi_{\langle s,\tau \rangle}]\!]^{\mathsf{M},w,g} = [\![\phi_{\langle s,\tau \rangle}]\!]^{\mathsf{M},w,g}(w)$.

xv.) *For each* $\tau \in \mathsf{Type}$*, for each* $n \in \mathbb{N}_0$*, for each* $v_{n,\tau} \in \mathsf{Var}$*, for each* $\phi_t \in \mathsf{ME}_t$*, for each* $w \in \mathsf{W}$*,*

$[\![\,(\forall v_{n,\tau}\ \phi_t)_t\,]\!]^{\mathsf{M},w,g} = 1$ *iff for each* $o \in \mathsf{D}_\tau$, $[\![\phi_t]\!]^{\mathsf{M},w,g\overset{o}{v}_{n,\tau}} = 1$.

xvi.) *For each* $\tau \in \mathsf{Type}$*, for each* $n \in \mathbb{N}_0$*, for each* $v_{n,\tau} \in \mathsf{Var}$*, for each* $\phi_t \in \mathsf{ME}_t$*, for each* $w \in \mathsf{W}$*,*

$[\![\,(\exists v_{n,\tau}\ \phi_t)_t\,]\!]^{\mathsf{M},w,g} = 1$ *iff for at least one* $o \in \mathsf{D}_\tau$, $[\![\phi_t]\!]^{\mathsf{M},w,g\overset{o}{v}_{n,\tau}} = 1$.